

7

LA SOLUTION DE SCHWARZSCHILD

- Solution à symétrie sphérique qui correspond à une approximation du champ gravitationnel généré par ex. par le soleil ou la terre. C'est une solution extérieure (c'est à dire $T_{\mu\nu} = 0$): on considère que l'espace est vide autour d'un corps gravitant à symétrie sphérique.

7.1 Préliminaires

DEF La symétrie sphérique à (3+1)-D consiste en les symétries de la sphère S^2 : les rotations ordinaires de l'espace euclidien à 3-D, qui forment $SO(3)$.

② Rappels: sphère S^2

→ $S^2 \equiv \{ (x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$ dans l'espace euclidien $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

→ Paramétrisation: on choisit (θ, φ) tel que:

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cos \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \theta \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{La métrique induite sur } S^2 \text{ est alors:} \\ ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{array}$$

→ Quels sont les isométries de S^2 ? (isométrie = transfo qui préserve $g^{(4D)}$)

Intuitivement, ce sont les isométries de $\mathbb{R}^3$ qui préservent $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

↳ Exemple: rotation autour de z :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y \\ -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y \\ z \end{pmatrix}$$

→ Le vecteur de Killing associé est:

$$\xi^\mu \equiv \frac{dx'^\mu}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \xi = \xi^\mu \partial_\mu = y \partial_x - x \partial_y \equiv R$$

Similairement, $S \equiv z \partial_x - y \partial_z$ et $T \equiv z \partial_y - y \partial_z$

En coordonnées (θ, φ) , ces vecteurs deviennent:

$$\begin{cases} R = -\partial_\varphi \\ S = -\cos \varphi \partial_\theta + \cot \theta \sin \varphi \partial_\varphi \\ T = \sin \varphi \partial_\theta + \cot \theta \cos \varphi \partial_\varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\sin \theta &\equiv s \\ \cos \theta &\equiv \theta \\ \sin \varphi &\equiv s\varphi \\ \cos \varphi &\equiv c\varphi\end{aligned}$$

En effet, soit $R = -x\partial_y + y\partial_x = \xi^\mu \partial_\mu$. Alors son vecteur associé est $\underline{\xi} = g_{\mu\nu} \xi^\nu$. Calculons $\underline{\xi}_x = g_{xx} \xi^x + g_{yx} \xi^y + \dots = \xi^x = y$. Aussi, $\underline{\xi} = -x dy + y dx$

$$= -s c\varphi (c s\varphi d\theta + s c\varphi d\varphi) + s s\varphi (c c\varphi d\theta - s c\varphi d\varphi)$$

$$= d\theta (-s c s\varphi c\varphi + s c s\varphi c\varphi) + d\varphi (-s^2 c\varphi^2 - s^2 s\varphi^2) = -s^2 d\varphi$$

$$\Rightarrow R^\mu = g^{\mu\nu} \underline{R}_\nu \text{ et } R_\theta = 0 \Rightarrow R^\mu = g^{\varphi\varphi} \underline{R}_\varphi = \frac{-s^2}{s^2} = -1$$

$$\Rightarrow R = -\partial_\varphi$$

On remarque que les vecteurs $\xi_A = (R, S, T)$ satisfaisant l'algèbre de $\mathfrak{so}(3)$: $[R, S] = T$, $[S, T] = R$, $[T, R] = S$
 $\Leftrightarrow [\xi_A, \xi_B] = \epsilon_{ABC} \xi_C$

① Propriétés:

Prop Si une métrique est indépendante d'une coordonnée y , alors ∂_y est un vecteur de Killing.

DEMO Supposons $g_{\mu\nu}$ indépendante de y et vérifions que $\xi = \partial_\varphi$ est un VK:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = (\partial_\mu \xi^\lambda) g_{\lambda\nu} + (\partial_\nu \xi^\lambda) g_{\mu\lambda} + \xi^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_y g_{\mu\nu} = 0$$

Prop Si u et v sont 2 vecteurs de Killing, alors leur crochet de Lie (commutateur) est également un VK.

DEF Une métrique est dite à symétrie sphérique $\Leftrightarrow$ elle possède 3 vecteurs de Killing satisfaisant l'algèbre de $\mathfrak{so}(3)$

9.2 Construction d'une métrique sphérique

$\rightarrow$ On se place dans les coordonnées (t, r, θ, φ) ce qu'on peut toujours faire du par la covariance généralisée de la théorie.

$\hookrightarrow$ Une métrique générale s'écrit alors:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi) dx^\mu dx^\nu$$

→ On peut montrer que pour que la métrique soit invariante sous $SO(3)$, il faut l'écrire sous la forme :

$$ds^2 = \alpha(r,t) dr^2 + \beta(r,t) \underbrace{(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}_{d\Omega^2} + \gamma(r,t) dt^2 + \delta(r,t) dr dt$$

Justifions : ① à (t,r) fixé, $ds^2 = \beta(r^*, t^*) d\Omega^2$, sphère de rayon $\sqrt{\beta}$

② à (θ, φ) fixé, $ds^2(t,r)$ tout point de la sphère sont équivalents

→ On peut simplifier la métrique en utilisant ses invariances résiduelles.

↳ On définit $\tilde{r}^2 = \beta(r,t)$. Alors la métrique devient

$$\tilde{t} = t$$

$$ds^2 = \tilde{\alpha}(\tilde{r}, t) d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2 + \tilde{\gamma}(\tilde{r}, t) dt^2 + \tilde{\delta}(\tilde{r}, t) dt d\tilde{r}$$

⚠ si $\beta(r,t) < 0$: impossible. Par ailleurs, si on impose que la métrique soit asymptotiquement plate : $\lim_{r \rightarrow \infty} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, donc

$$ds^2_{\text{Mink}} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \Rightarrow \beta(r \rightarrow \infty, t) = r^2$$

Donc il y a au moins une région de l'espace avec $\beta > 0$ et on peut inverser β .

↳ On a $ds^2 = \alpha(r,t) dr^2 + r^2 d\Omega^2 + \gamma(r,t) dt^2 + \delta(r,t) dr dt$

→ Élimination du terme croisé : $\alpha dt dr$

↳ On pose $\begin{cases} r = r' \\ t = f(r', t') \end{cases}$ avec $\frac{\partial f}{\partial t'} \neq 0$ relation inversible pour avoir $t'(t, r')$

↳ Alors $dr = dr'$ et $dt = \partial_{r'} f dr' + \partial_{t'} f dt'$

↳ $\gamma(r,t) dt^2 + \delta(r,t) dr dt = dt' dr' \underbrace{\left(2\gamma \partial_{r'} f \partial_{t'} f + \delta \partial_{t'}^2 f \right)}_{\text{à annuler}} + \dots$

On choisit f telle que $\delta + 2\gamma \partial_{t'} f = 0$

On a alors besoin que $\gamma \neq 0$. On suppose que c'est le cas puisque $\gamma(r \rightarrow \infty) = -1$

→ Ainsi, la symétrie sphérique + condition asymptotique, on a :

$$ds^2 = \alpha(r,t) dr^2 + \gamma(r,t) dt^2 + r^2 d\Omega^2$$

↳ On pose : $\alpha(r,t) = \exp[\mu(r,t)]$ et $\gamma(r,t) = -\exp[\nu(r,t)]$

Le choix de paramétrisation fixe la forme de α et γ afin que la métrique obtenue soit Lorentzienne (1,3,0) et tendent vers $\eta_{\mu\nu}$ en $r \rightarrow \infty$.

On a finalement :

$$ds^2 = -e^{\nu(r,t)} dt^2 + e^{\mu(r,t)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Théorème de Birkhoff ↗ (sphérique + asympt. plate = statique)

7.3 Métrique solution des EDE dans le vide

→ On cherche une métrique qui soit solution des équations d'Einstein dans le vide. Ceci requiert:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = 0 \quad \parallel \text{Tr}(\cdot) \quad (g^{\mu\nu})$$

$$\Leftrightarrow R - \frac{R}{2} \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow R = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0$$

On doit donc calculer les symboles de Christoffel pour calculer le Riemann.

① Symboles de Christoffel à pd l'éq. des géodésiques

→ Rappel: $\frac{dx^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0$. Cette équation dérive du

principe variationnel: $S[x^\mu] = \int d\lambda \mathcal{L} = \int \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda$

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{dx^\mu}{d\lambda})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0$$

$$g_{00} = -e^\nu \quad g_{11} = e^\mu \quad g_{22} = r^2 \\ g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$$

$$\rightarrow \text{On a } \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-e^\nu \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 + e^\mu \left(\frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{dx^2}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{dx^3}{d\lambda} \right)^2 \right]$$

$(t, r, \theta, \varphi) \rightarrow$ Les eq. d'E-L pour $\mu=0$ deviennent:

$\mu(x^0, x^1)$
 $\nu(x^0, x^1)$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{2} (-2 e^\nu) \frac{dx^0}{d\lambda} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^0} = 0$$

$$\Leftrightarrow - \frac{d}{d\lambda} \left(e^\nu \cdot \frac{dx^0}{d\lambda} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^0} = 0$$

$$\Leftrightarrow -e^\nu \left(\dot{\nu} \frac{dx^0}{d\lambda} + \nu' \frac{dx^1}{d\lambda} \right) \frac{dx^0}{d\lambda} - e^\nu \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} - \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 e^\nu \cdot \dot{\nu} + \left(\frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 e^\mu \cdot \dot{\mu} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} \cdot (-e^\nu) - \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 \frac{e^\nu}{2} \dot{\nu} + \left(\frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 \frac{e^\mu}{2} \dot{\mu} - \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} e^\nu \nu' = 0 \quad \parallel \cdot e^{-\nu}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + \frac{\dot{\nu}}{2} \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2} e^{\mu-\nu} \dot{\mu} \left(\frac{dx^1}{d\lambda} \right)^2 + \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} \nu' = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma_{00}^0 = \dot{\nu}/2 \quad \Gamma_{11}^0 = \dot{\mu} e^{\mu-\nu}/2 \quad \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \nu'/2$$

→ Similairement, on a:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= e^{\nu-\mu} \nu'/2, & \Gamma_{01}^1 &= \mu/2, & \Gamma_{11}^1 &= \mu'/2, & \Gamma_{22}^2 &= -e^{-\mu} \cdot r \\ \Gamma_{33}^3 &= -e^{-\mu} r \sin^2 \theta, & \Gamma_{12}^2 &= r^{-1}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{13}^3 &= r^{-1}, & \Gamma_{32}^2 &= \cot \theta, & \text{tout les autres sont nuls.}\end{aligned}$$

② Calcul du Riemann et du Ricci

→ Le Riemann est donné par $R_{\rho\gamma\sigma}^{\alpha} = \partial_{\gamma} \Gamma_{\rho\sigma}^{\alpha} - \partial_{\sigma} \Gamma_{\rho\gamma}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\mu}^{\alpha} \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} \Gamma_{\rho\gamma}^{\mu}$
avec $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\delta\gamma\alpha\beta}$

↳ Calculons un Riemann:

$$\begin{aligned}R_{101}^0 &= \partial_0 \Gamma_{11}^0 - \partial_1 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{0\mu}^0 \Gamma_{11}^{\mu} - \Gamma_{1\mu}^0 \Gamma_{01}^{\mu} \\ &= \partial_0 \left(\frac{\dot{\mu}}{2} e^{\mu-\nu} \right) - \partial_1 (\nu'/2) + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 \\ &= \frac{\ddot{\mu}}{2} e^{\mu-\nu} + \frac{\dot{\mu}}{2} (\dot{\mu} - \dot{\nu}) e^{\mu-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\dot{\nu}}{2} \frac{\dot{\mu}}{2} e^{\mu-\nu} + \frac{\nu'}{2} \frac{\mu'}{2} - \frac{\nu' e^{\mu-\nu}}{4} - \frac{\dot{\mu}}{2} e^{\mu-\nu} \cdot \frac{\dot{\mu}}{2} \\ &= e^{\mu-\nu} \left[\frac{\ddot{\mu}}{2} - \frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\nu}\dot{\mu}}{4} - \frac{\dot{\mu}^2}{4} \right] - \frac{\nu''}{2} + \frac{\mu'\nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} \\ &= \frac{\ddot{\mu}}{2} e^{\mu-\nu} + \frac{\dot{\mu}^2}{4} e^{\mu-\nu} - \frac{\dot{\mu}\dot{\nu}}{4} e^{\mu-\nu} - \frac{\nu''}{2} + \frac{\mu'\nu'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} = R_{101}^0\end{aligned}$$

→ Les autres composantes non nulles sont:

$$\begin{aligned}R_{212}^0 &= -\dot{\mu} r e^{-\nu}/2 & R_{212}^1 &= \mu' r e^{-\mu}/2 \\ R_{313}^0 &= \dot{\mu} r \sin^2 \theta e^{-\nu}/2 & R_{313}^1 &= \mu' r \sin^2 \theta e^{-\mu}/2 \\ R_{202}^1 &= -r \nu' e^{-\mu}/2 & R_{323}^2 &= \sin^2 \theta (1 - e^{-\mu}) \\ R_{303}^1 &= r \sin^2 \theta \nu' e^{-\mu}/2\end{aligned}$$

→ Calculons le Ricci:

$$\begin{aligned}R_{00} &= R_{\alpha\alpha 0}^0 = R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3 \\ \rightarrow R_{010}^1 &= g^{1\mu} R_{\mu 010} = g^{11} R_{0101} = g^{11} R_{0101} \cdot (-1)^2 \\ &= g_{0\alpha} g^{11} R_{1\alpha 01} = g_{00} g^{11} R_{101}^0 = g_{00}/g_{11} \cdot R_{101}^0 \\ &= -e^{\nu} e^{-\mu} \cdot R_{101}^0 \text{ connu}\end{aligned}$$

On trouve:

$$\begin{aligned}R_{00} &= -\frac{\ddot{\mu}}{2} - \frac{1}{4} \dot{\mu} (\dot{\mu} - \dot{\nu}) + e^{\nu-\mu} \left[\nu''/2 - \mu'\nu'/4 + \nu'^2/4 + \nu'/2 \right] \\ R_{01} &= \dot{\mu}/r \\ R_{11} &= \frac{1}{4} (\dot{\mu} - \dot{\nu}) \dot{\mu} e^{\mu-\nu} + \frac{1}{2} e^{\mu-\nu} \ddot{\mu} - \frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \nu'\mu' - \frac{1}{4} \nu'^2 + \mu'/r \\ R_{22} &= e^{-\mu} \left(e^{\mu-1} + \frac{\nu}{2} (\mu' - \nu') \right) \\ R_{33} &= \sin^2 \theta R_{22}\end{aligned}$$

Or, $R_{\mu\nu} = 0$. Ainsi,

① $R_{01} = 0 \Rightarrow \dot{\mu} = 0 \Rightarrow \mu = \mu(r)$ et $\ddot{\mu} = 0$

② $R_{00} = 0 = R_{11} \Rightarrow R_{00} + e^{\nu-\mu} R_{11} = 0$

$\Leftrightarrow e^{\nu-\mu} \nu'/r + e^{\nu-\mu} \mu'/r = 0 \Leftrightarrow \nu' + \mu' = 0 \Rightarrow \nu = \lambda(t) - \mu(r)$

$\Rightarrow e^{\nu} = e^{-\mu(r)} e^{\lambda(t)}$

La métrique devient: $ds^2 = -e^{-\mu(r)} e^{\lambda(t)} dt^2 + e^{\mu(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2$

$\hookrightarrow$ En redéfinissant la coord. temporelle $dt^2 \mapsto e^{\lambda(t)} dt^2$, on a:

$ds^2 = -e^{-\mu} dt^2 + e^{\mu} dr^2 + r^2 d\Omega^2$

$\hookrightarrow$ La métrique ne dépend plus du temps!

DEF

Une métrique est statique si il existe un système de coord. tq

① la métrique est indépendante du temps (stationnaire)

② la métrique est invariante sous $t \mapsto -t$

Une telle métrique peut toujours s'écrire $ds^2 = g_{00}(x^i) dt^2 + g_{ij}(x^k) dx^i dx^j$

Thm

(de Birkhoff) Toute solution asymptotiquement plate à symétrie sphérique des équations d'Einstein du vide est statique.

③ $R_{22} = 0 \Rightarrow e^{-\mu} (e^{\mu} - 1 + r^2 (\mu' - \nu')) = 0 \quad \mu' = -\nu'$

$\Leftrightarrow e^{\mu} + r\mu' - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\mu} + e^{\mu} (-re^{-\mu})' = 0$

$\Leftrightarrow (re^{-\mu})' = 1 \Leftrightarrow re^{-\mu} = r + C \stackrel{!}{=} r - 2m$

$\Rightarrow e^{-\mu} = 1 - 2m/r = e^{\nu}$

DEF

On trouve la solution de Schwarzschild

$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - 2m/r} dr^2 + r^2 d\Omega^2$

④ Interprétation de la constante d'intégration

$\rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} ds^2 = ds^2_{\text{Mink}} = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$

et $ds^2 \simeq -(1 - 2m/r) dt^2 + (1 + 2m/r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 + \mathcal{O}(1/r^2)$

Or, la limite newtonienne donne $g_{00} = -(1 + \frac{2\Phi}{c^2}) \stackrel{!}{=} -1 + \frac{2m}{r}$

$\Leftrightarrow -1 + \frac{2GM}{rc^2} \stackrel{!}{=} -1 + \frac{2m}{r} \Leftrightarrow m = GM/c^2$

$\Phi = -\frac{GM}{r}$

DEF

Le rayon gravitationnel d'un corps est $m = \frac{GM}{c^2}$, $[m] = L$

7.4

Singularités de la métrique

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

→ La forme de la métrique de Schwarzschild diverge en $r=0$ et $r=2m$. Les coeff. $g_{\mu\nu}$ de la métrique sont des qts qui dépendent du choix de système de coordonnées $\Rightarrow$ pas de signification intrinsèque.

→ Exemple : la métrique $ds^2 = \frac{dp^2}{(p-2m)^4} + \frac{1}{(p-2m)^2} d\theta^2$ diverge en $p=2m$.

Mais en effectuant $r = (p-2m)^{-1} \Rightarrow dr^2 = (p-2m)^{-4} dp^2$, on retrouve la métrique $ds^2 = dx^2 + dy^2$

→ Pour déterminer si une région représente une véritable pathologie, on doit se fier à des qts scalaires (une qte scalaire qui diverge dans 1 système de coordonnées diverge dans tous).

DEF Un point est appelé une singularité si une quantité scalaire associée à la métrique y devient infinie ET que ce point peut être atteint en voyageant une distance finie le long d'une courbe.

① Calculs de quantités scalaires :

→ On connaît le scalaire de Ricci R , mais on sait que $R=0$

DEF Le scalaire de Kretschmann est défini comme $R_{\mu\nu\kappa\rho} R^{\mu\nu\kappa\rho} = K$

→ Calculons K pour espérer avoir une qte scalaire non triviale :

$$K = R_{\mu\nu\kappa\rho} R^{\mu\nu\kappa\rho} + R_{\mu\nu\kappa\rho} R^{\mu\nu\kappa\rho} = 2 R_{0m\kappa\rho} R^{0m\kappa\rho} + R_{mn\kappa\rho} R^{mn\kappa\rho}$$

$$= (\dots) = \frac{48 m^2}{r^6} = \frac{48 G^2 M^2}{c^4 r^6}$$

→ En $r=0$, $K \rightarrow \infty \Rightarrow$ la métrique est singulière (l'amplitude des forces de marée est ∞ en $r=0$), mais pas en $r=2m$ (pathologie de la métrique)

DEF On définit le rayon de Schwarzschild $R_s \equiv \frac{2GM}{c^2} = 2m$

$$R_s(\text{tenu}) = 1 \text{ cm} \quad R_s(\text{Soleil}) \approx 3 \text{ km}$$

7.5 Géodésiques de la métrique de Schwarzschild

- Des particules -test vont suivre des géodésiques temporelles de la métrique de Schwarzschild
 ↳ généralisation relativiste du déplacement dans un potentiel central en mécanique Newtonienne.

⊙ Problème de Kepler en mécanique Newtonienne.

- Soit une planète de masse m dans le champ de gravitation d'un corps de masse M (générant un potentiel central).

Les équations du mvt sont $\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{\nabla}\left(-\frac{GM}{r}\right)$

→ On suppose que le mvt se fait dans le plan $\theta = \pi/2$

→ On a 2 intégrales premières:

① Conservation de $|\vec{L}|$ (amplitude du moment angulaire):

$$r^2 \dot{\varphi} = a = \text{cte} \quad 2^e \text{ loi de Kepler} \sim \text{loi des aires}$$

② Conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = E \triangleq E \cdot m \quad \text{où } E \text{ densité d'énergie}$$

$$\text{Or, } \vec{r} = r \cdot \vec{r} \quad \dot{r} = \dot{r} \vec{r} + r \dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{r} + r \dot{\varphi} \vec{t}_{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{GM}{r} = E \quad \text{Or, } r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{(r^2 \dot{\varphi})^2}{r^2} = \frac{a^2}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{a^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = E \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2} \dot{r}^2 = E - \left(\frac{a^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \right)$$

$\begin{matrix} \text{potentiel} \\ \text{gravitationnel} \\ \text{potentiel centrifuge} \end{matrix}$

$$\text{On pose } V_{\text{eff}}(r) = \frac{a^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$$

- Les trajectoires possibles d'une particule sont obtenues en comparant l'énergie E à V_{eff} , dont la forme dépend de a (si $E < V_{\text{eff}}$, alors $\dot{r}^2 < 0$)

En E_1 : orbite circulaire

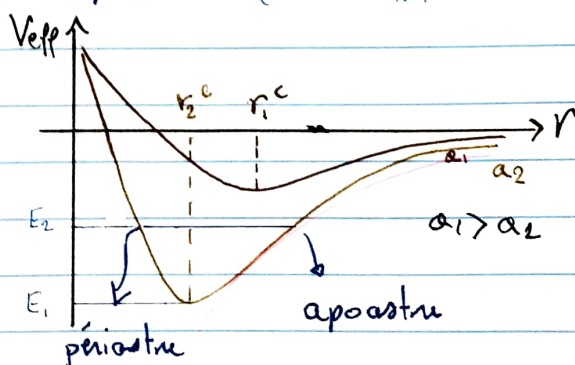
E_2 : orbite elliptique

↳ Orbite circulaire lorsque

$$V'_{\text{eff}}(r_c) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{a^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow r_c = a^2 / GM \rightarrow \exists \text{ fs pour } a \neq 0$$



① Constantes du mouvement pour la géodésique de Schwarzschild:

① Longueur du vecteur tangent: (vrai & métrique)

→ Pour une géodésique de genre temps paramétrisée par le temps propre:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -d\tau^2$$

Alors $L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}$ constante le long de la géodésique.

Pour une géodésique de genre lumière ($ds^2 = 0$), on a $L = 0$

② Métrique statique:

Si $g_{\mu\nu}(t, x^i) = g_{\mu\nu}(x^i)$, alors $L(t, x^i) = L(x^i)$. Par E-L, on a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \text{cte} = -b$$

$$\text{On, } L = \frac{1}{2} \left[-(1-2m/r) \dot{t}^2 + (1-2m/r)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] = -\frac{1}{2}$$

Ainsi, $\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -(1-2m/r) \dot{t} = -b \Rightarrow (1-2m/r) \dot{t} = b$

③ Symétrie sphérique:

Si la métrique est indépendante d'un coord (ici t), ça fournit une qte conservée le long des géodésiques gratuitement. Ceci se généralise à tout vecteur de Killing de la métrique.

Ici, la symétrie sphérique fournit 3 vecteurs de Killing formant $so(3)$: R, S, T . Ceux-ci fournissent 3 constantes du movt supplémentaires.

Deux combilis de ces ctes $\Rightarrow \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = C \hat{=} \pi/2$ ($\Leftrightarrow$ en mécanique Newtonienne à $dL=0$). La conservation de $|L|$ est une cte de

l'indépendance de L en ϕ : $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \dot{\phi} \hat{=} a$

Prop Soit ξ^μ un champ de vecteurs de Killing et u^μ le champ des vecteurs tangents à une géodésique. Alors la quantité $\xi^\mu u_\mu$ est conservée le long de la géodésique (ie est une constante du mouvement).

DEMO $\frac{d}{d\lambda} (\xi^\mu u_\mu) = u^\rho \partial_\rho (\xi^\mu u_\mu) = u^\rho \nabla_\rho (\xi^\mu u_\mu) = u^\rho (\nabla_\rho \xi^\mu u_\mu + \xi^\mu \nabla_\rho u_\mu)$
 $= 0$
 $= \underbrace{u^\rho \nabla_\rho \xi^\mu}_{\text{sym}} u_\mu + \underbrace{u^\rho \nabla_\rho u_\mu}_{\text{antisym}} \xi^\mu = 0$ car géodésique

① Géodésiques de genre temps:

→ Une fois les constantes du mouvement calculées, on peut les injecter dans le Lagrangien:

$$(1-2m/r)\dot{t} = b \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-(1-2m/r)\dot{t}^2 + (1-2m/r)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \right] = \frac{1}{2}$$

$$r^2\dot{\varphi} = a$$

$$\dot{\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow -(1-2m/r)^{-1}b^2 + (1-2m/r)^{-1}\dot{r}^2 + \frac{a^2}{r^2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -b^2 + \dot{r}^2 + (1+a^2/r^2)(1-2m/r) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{b^2}{2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{b^2}{2} - \left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{gravitation}} - \underbrace{\frac{m}{r}}_{\text{centrifuge}} + \underbrace{\frac{a^2}{2r^2}}_{\text{correction relativiste}} - \underbrace{\frac{ma^2}{r^3}}_{\text{correction relativiste}} \right) \quad \parallel \frac{1}{r}\dot{r}^2 = E + \frac{m}{r} - \frac{a^2}{2r^2}$$

→ Pour $a \neq 0$ ($\dot{\varphi} \neq 0$), la correction relativiste contribue à l'ordre $\sim \frac{ma^2/r^3}{a^2/2r} \sim \frac{m}{r} \sim \frac{GM_\odot}{c^2 R} \sim 10^{-7}$. Effet petit mais observable si cumulatif.

② Etude de $V_{\text{eff}}(r)$ et des orbites:

→ On a $V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} - \frac{m}{r} + \frac{a^2}{2r^2} - \frac{ma^2}{r^3}$

$$\rightarrow V'_{\text{eff}}(r) = \frac{m}{r^2} - \frac{a^2}{r^3} + \frac{3ma^2}{r^4}$$

① Lorsque $r=2m$ et $r \rightarrow \infty$:

$$V_{\text{eff}}(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{2}, \quad V_{\text{eff}}(r=2m) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{c^4 m^2} - \frac{ma^3}{8m^3} = 0$$

② Orbites circulaires:

Il faut $r / V'_{\text{eff}}(r) = 0$

$$\hookrightarrow mr^2 - a^2r + 3ma^2 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4m \cdot 3ma^2}}{2m}$$

$$r = \frac{a^2 \pm a\sqrt{a^2 - 12m^2}}{2m}$$

→ Si $a^2 < 12m^2$: pas d'orbite circulaire // $a=0$ chez Newton

→ Si $a^2 = 12m^2$: orbite circulaire en $r = \frac{a^2}{2m} = 6m$

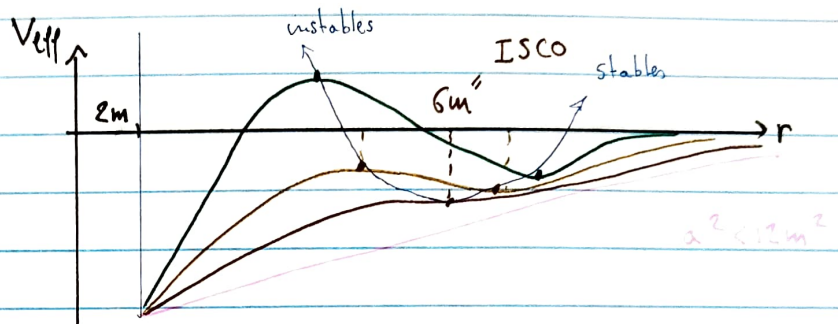
→ Si $a^2 > 12m^2$: V'_{eff} s'annule 2x: 2 orbites circulaires (stable et instable)

On trouve $r_{\text{instable}} < 6m$ et $r_{\text{stable}} > 6m$
 $\Rightarrow r = 6m$ est le rayon minimal, pour avoir une orbite circulaire stable = ISCO (Innermost stable circular orbit).

③ Rayon minimum d'une orbite circulaire (instable):

$$r_{\text{min}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^2 - a \sqrt{a^2 - 12m^2}}{2m} \approx \frac{a^2 - a^2(1 - 12m^2/2a^2)}{2m} = \frac{12m^2}{4m} = 3m$$

Il n'existe pas d'orbite géodésique circulaire pour $r < 3m$. Il existe cependant des trajectoires plongeantes et des trajectoires accélérées.



$\rightarrow$ On peut passer d'une orbite circulaire à une autre jusqu'à $r = 6m$.
 A cet endroit, pour passer à une orbite circulaire plus proche, il faut augmenter a . On peut s'approcher de $r = 3m$, mais l'atteindre $a = \infty \Rightarrow$ on plonge.

④ Avance du périhélie de Mercure



$\rightarrow$ La précession des ellipses (par ex de Mercure autour du Soleil) ne peut être expliquée par la théorie Newtonienne.

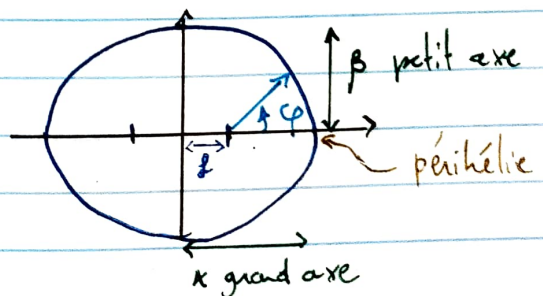
Historiquement, on a postulé l'existence d'une nouvelle planète: Vulcain. On va déterminer l'amplitude de cet effet en RG.

Il faut alors exprimer $r(\varphi)$ à partir de l'équation des géodésiques. Pour une ellipse parfaite $r(\varphi) = r(\varphi + 2\pi)$

$$\rightarrow p = \alpha(1 - e^2); e = \ell/\alpha^2; \ell = \sqrt{\alpha^2 - p^2}$$

$$\rightarrow u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} = \frac{1 + e \cos \varphi}{p}$$

Pour une ellipse, $e < 1$
 excentricité



→ En RG, on avait:

$$[a] = L$$

$$-(1-2m/r)^{-1} \dot{b}^2 + (1-2m/r)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{a^2}{r^2} = -1$$

Or,

$$r\dot{\varphi} = a$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dz} \cdot \frac{dz}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \Leftrightarrow \dot{r} = \dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{a}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \text{ On injecte:}$$

$$-(1-2m/r)^{-1} \dot{b}^2 + \frac{a^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 (1-2m/r)^{-1} + \frac{a^2}{r^2} = -1$$

$$\Rightarrow -\dot{b}^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{a^2}{r^4} + \frac{a^2}{r^2} (1-2m/r) = -1 + 2m/r$$

$$\text{On pose } u = 1/r \Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \Rightarrow \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2$$

$$\Rightarrow a^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + a^2 u^2 = \dot{b}^2 - 1 + 2mu + 2ma^2 u^3 \text{ on pose } a \neq 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 = \frac{\dot{b}^2 - 1}{a^2} + \frac{2mu}{a^2} + 2mu^3 \parallel d/d\varphi (\cdot)$$

$$\Rightarrow 2 \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + 2u \frac{du}{d\varphi} = \frac{2m}{a^2} \frac{du}{d\varphi} + 6mu \frac{du}{d\varphi}$$

$$\text{On trouve } \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{a^2} + 3mu^2$$

→ Chez Newton, on avait:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{GM}{r} = \text{cst} & \text{conservation de l'E} \\ r^2 \dot{\varphi} = a_N & \text{conservation de L} \end{cases}$$

$$[a_N] = L^2 T^{-1}$$

On trouve l'équation de Binet:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{a^2}$$

→ Comparons les 2 expressions:

→ L'ordre de grandeur de la correction est $\frac{3m/r^2}{r} \sim \frac{m}{r} \sim \frac{GM_0}{R_0 c^2}$
On va traiter perturbativement la nouvelle eq.

→ Solution Newtonienne: donnée par: $u_0 = \frac{m}{a^2} (1 + e \cos \varphi)$

→ Traitement perturbatif de la solution Newtonienne:

On écrit $u = u_0 + u_1$ avec $u_1 \ll u_0$. On injecte:

$$\frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} + \frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_0 + u_1 = \frac{m}{a^2} + 3m(u_0^2 + u_1^2 + 2u_0 u_1)$$

très petit

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1(1 - 6m u_0) = 3m u_0^2$$

$m u_0 \sim m/R \sim 10^{-7}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = 3m(1 + e \cos \varphi)^2 \frac{m^2}{a^4}$$

$\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$
 $\cos^2 \varphi = (1 + \cos(2\varphi))/2$

$$= \frac{3m^3}{a^4} \left[(1 + e^2/2) + 2e \cos \varphi + \frac{e^2}{2} \cos(2\varphi) \right]$$

On s'intéresse à la correction non-périodique. Une solution particulière est donnée par:

$$u_1 = \frac{3m^3}{a^4} \left[\left(1 + e^2/2\right) - \frac{1}{6} e^2 \cos(2\varphi) + e \varphi \sin \varphi \right]$$

négligeables car cst et périodique

$$\hookrightarrow u \simeq \frac{m}{a^2} (1 + e \cos \varphi) + \frac{3m^3}{a^4} e \varphi \sin \varphi$$

$$\simeq \frac{m}{a^2} + \frac{me}{a^2} \left(\cos \varphi + \frac{3m^2}{a^2} \varphi \sin \varphi \right)$$

$$\cos[\varphi(1 + \epsilon)] = \cos(\varphi - \varphi \epsilon)$$

$$\simeq \cos \varphi + \varphi \epsilon \sin \varphi$$

$$\simeq \frac{m}{a^2} (1 + e \cos[\varphi(1 - 3m^2/a^2)])$$

→ Le périhélie correspond au max $\{u = 1/r\}$: atteint lorsque

$$\cos[\varphi(1 - 3m^2/a^2)] = 1 \Rightarrow \varphi_n(1 - 3m^2/a^2) = 2\pi n$$

$$\varphi_1 = 2\pi(1 - 3m^2/a^2)^{-1} > 2\pi$$

$$\hookrightarrow \Delta\varphi = \varphi_1 - 2\pi \simeq 2\pi(1 + 3m^2/a^2) - 2\pi = \frac{6\pi m^2}{a^2}$$

→ Application numérique:

$$\Delta\varphi \simeq 5 \cdot 10^{-7} \text{ rad/orbite (Mercure-Soleil)}$$